Théorème spectral et Corollaire | Leçons : ~~148~~ ~~152~~, ~~151~~, 155, ~~156~~ 157, 150, ~~151~~, 158, 153

Réf. Rombaldi + Gourdon

Soit $(E, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.
$u \in S(E)$ de matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{B}$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $E_\lambda(u) = \ker(\lambda id - u)$

Lemme 1:

$\forall \lambda \in Sp(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall \mu \in Sp(A) \setminus \{\lambda\}$, $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$

A vue comme une matrice de $\mathbb{C}$ — vu comme un ss-esp de $\mathbb{R}^n$

Preuve:

Soit $(\lambda, \mu) \in Sp(A)^2$ tq $\lambda \neq \mu$

- Soit $x \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$, $Ax = \lambda x$ donc ${}^t\bar{x}Ax = \lambda\, {}^t\bar{x}x$. Or $A \in S_n(\mathbb{R})$ (vu comme un ss-esp de $\mathbb{C}^n$)
donc ${}^t\bar{x}Ax = {}^t(\overline{Ax})x = \bar{\lambda}\, {}^t\bar{x}x$, or ${}^t\bar{x}x \neq 0$ d'où $\lambda = \bar{\lambda}$ d'où $\lambda \in \mathbb{R}$
- Soit $(x, y) \in E_\lambda(A) \times E_\mu(A)$, $\lambda\langle x|y\rangle = \langle \lambda x|y\rangle = \langle Ax|y\rangle = \langle x|{}^tAy\rangle = \langle x|Ay\rangle = \mu\langle x|y\rangle$
or $\lambda \neq \mu$ d'où $\langle x|y\rangle$ d'où $E_\lambda(A) \perp E_\mu(A)$

Lemme 2:

Soit $(\lambda, e_1) \in Sp(~~A~~) \times E_\lambda(u)$ ~~Alors~~, e_1 de norme 1. Alors $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u

vu comme un ss-esp de E

Preuve:

Notons $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp = \ker(\langle\cdot|e_1\rangle)$ et $\langle\cdot|e_1\rangle \neq 0$ car $e_1 \neq 0$ donc H est un hyperplan
Soit $x \in H$, on a $\underbrace{\langle u(x)|e_1\rangle = \langle x|u(e_1)\rangle}_{\text{car } u \text{ est symétrique}} = \langle x|\lambda e_1\rangle = 0 \Rightarrow u(x) \in H$

Donc $u(H) \subset H$

Donc on dispose de l'endomorphisme induit $u_H \in S(H)$

(Il est bien symétrique car si on complète (e_1) en base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ alors $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de H et en notant $B = \mathrm{Mat}_{(e_2, \dots, e_n)} u_H$ on a $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ d'où B symétrique)

Théorème spectral: u se diagonalise en base orthonormée et $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tPAP$ est diagonale

Preuve: On procède par récurrence sur n

1) On note (H_n): Le théorème spectral est vrai pour tout espace ~~eucl~~ euclidien E tq $\dim E \leq n$

- Si $n = 1$, (H_1) est vérifiée

- Si $n > 1$, Supposons que (H_k) est vérifiée $\forall k < n$, Supposons que E est de dimension n, soit $u \in S(E)$

Soit $\lambda_1 \in Sp(u)$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}(u)$ de norme 1. ← λ existe car on se place dans $\mathbb{C}$ algébriquement clos

Soit u_H l'endomorphisme symétrique sur $H = (\mathbb{R}e_1)^{\perp}$ induit par u d'après lemme 2.

On a $E = \mathbb{R}e_1 \overset{\perp}{\oplus} H$ et $\dim H < n$, donc par hypothèse de récurrence, il existe $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de H qui diagonalise u_H. De là, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E qui diagonalise u

2) Une matrice orthogonale est une matrice de passage entre bases orthonormées

Corollaire 1 :

Soit q une forme quadratique sur E. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de E qui est q-orthogonale.

Preuve :

Soit $M = Mat_{\mathcal{B}} q$, d'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPMP$ est diagonale.
Or P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers une base orthonormée $\mathcal{B}'$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(q) = {}^tPMP$ est diagonale

Corollaire 2 :

Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $N \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP$ est diagonale

Preuve :

Posons $q : X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^tXMX$ la forme quadratique dont M est la matrice dans la base canonique
Posons $q' : X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^tXNX$ la forme quadratique dont N est la matrice dans la base canonique
Dans l'espace euclidien (E, q), il existe une base $\mathcal{B}_q$ orthonormée de $\mathbb{R}^n$ qui est q'-orthogonale d'après le corollaire 1.
Posons $D = Mat_{\mathcal{B}_q}(q)$ et $P = Pass(\mathcal{B}, \mathcal{B}_q)$. Alors ${}^tPMP = I_n$ et ${}^tPNP = D$

Application :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

, $\cancel{\#}$ → polynôme caractéristique $\chi = (X-1)^4(X-6)$
Or par théorème spectral la matrice est diagonalisable de polynôme minimal scindé à racines simples divisant χ donc $N = (X-1)(X-6)$

Algèbre, Rombaldi :